

**DOS EJERCICIOS DIDÁCTICOS  
A PROPÓSITO  
DEL ECLIPSE DE LUNA**

Por Alberto Martos Rubio.



## A PROPÓSITO DEL ECLIPSE

Las condiciones especiales en que se iba a producir el eclipse de Luna ocurrido en la noche del 20 al 21 de Febrero de 2008, prometían todo un caudal de actividades astronómicas interesantes para llevar a cabo de manera conjunta los aficionados a la astronomía de Europa occidental y de Latinoamérica. Además, la consciencia de que transcurrirán siete años para que se vuelvan a repetir aquellas circunstancias favorables para la observación conjunta, nos han espoleado a todos a tratar de sacar el máximo partido de nuestros instrumentos y de nosotros mismos, sin escatimar esfuerzo.

Sin embargo, el mal tiempo ha dado al traste con casi todas las expectativas que habíamos creado. En Europa, las nubes, la bruma y la humedad propias del invierno, han yugulado la ilusión con que muchos astrónomos aficionados habíamos preparado nuestras actividades. En España la mala suerte ha influido con “más saña”, impidiendo la lluvia el trabajo de muchos aficionados, precisamente en el año más seco de los últimos treinta, según registran las estadísticas. En Latinoamérica, la bruma y, en algunos casos, las nubes, se han confabulado para hacer la observación más difícil en muchos lugares, siendo las condiciones meteorológicas favorables, solamente en algún punto privilegiado (Montevideo).

Pero a pesar de los elementos adversos, se ha observado el fenómeno y se han obtenido fotografías de muy diversa calidad, que nos permiten realizar algunas actividades entre las previstas. La galería de Cielo Sur se va llenando poco a poco con los exponentes de quienes no se han desanimado ante la adversidad y han sabido aprovechar, con mejor o peor suerte, lo que los imponderables les han permitido obtener.

Nosotros deseamos aprovechar la existencia de estos resultados para rescatar parte del atractivo que buscábamos en la observación del fenómeno, ofreciendo un par de actividades relativamente sencillas, que se pueden realizar, al menos una de ellas, con las secuencias fotográficas tomadas por muchos aficionados. Las hemos denominado Ejercicios Didácticos por ser este aspecto el mayor valor de su puesta en práctica.

El primer Ejercicio Didáctico está relacionado con el prometido Applet para calcular la paralaje lunar, y va dedicado a quienes hubieran obtenido las fotografías recomendadas para llevar a cabo esta medida. Se trata de medir la posición de la Luna con respecto a las estrellas de referencia.

El segundo Ejercicio Didáctico no ha sido anunciado previamente, pero por su sencillez, está al alcance de la mayoría de los aficionados que hayan tomado fotografías durante el eclipse. Consiste en “fotografiar la sombra de la Tierra”, o sea, tratar de visualizar dicha sombra a partir de tres fotografías tomadas en tres momentos del fenómeno, la primera parcialidad, la totalidad y la segunda parcialidad.

[Página dejada en deliberadamente en blanco]

## EJERCICIO DIDÁCTICO 1.

### **Medida de la posición de la Luna con respecto a las estrellas de referencia.**

Una de las actividades más atractivas que ofrecía la observación del eclipse de Luna conjuntamente por aficionados de ambos hemisferios, era la medida de la distancia Tierra-Luna por medio de la paralaje lunar, aprovechado el paso de nuestro satélite entre dos estrellas brillantes, Regulus ( $M_v = 1,4$ ) y 31 Leonis ( $M_v = 4,4$ ), justamente antes del primer contacto con la sombra. Este experimento, del que se habla en todos los cursos de astronomía, raramente se puede llevar a cabo por la necesidad de coordinar a observadores situados en países muy distantes, cuyos horario de trabajo y visibilidad de la Luna son muy dispares. Por ello, dicha medida se explica en los estudios teóricamente, sin posibilidad de realización, al contrario que con otros tópicos astronómicos.

Al objeto de aprovechar tal oportunidad con ocasión del eclipse, hemos previsto en la Guía de Actividades la realización de esta medida y hemos indicado en la Guía de Campo la manera de proceder para llevarla a cabo mediante una fotografía simultánea desde observatorios emplazados en los dos continentes. Para obtener el resultado se ha pensado poner en breve a disposición de todos los observadores un pequeño programa en lenguaje Java (un Applet) que efectuará la parte más complicada del cálculo, tomando como datos iniciales los correspondientes a una pareja cualquiera de observatorios convenientemente distantes. Tales datos serán la situación geográfica de los observatorios en cuestión y la posición de la Luna con respecto a las estrellas de referencia a la hora prefijada (01:00:00 T. U.) desde cada uno de ellos.

En términos concretos, para poder acometer este cálculo el Applet demandará a cada observador interesado un juego de sus propias coordenadas geográficas (latitud, longitud y altitud sobre el nivel medio del mar), así como la distancia a que se vio la Luna de las dos estrellas de referencia, desde su observatorio a la hora prefijada. Y asimismo otro juego con esta misma información correspondiente al segundo observatorio que haya elegido el primer observador como colaborador. Para que toda esta información esté disponible a cualquier observador, debemos comunicarla a Cielo Sur para que pueda ser tabulada y expuesta públicamente.

El resultado que se obtenga con el Applet será fiel si los datos de entrada son lo más exactos posible. En el caso de las coordenadas geográficas hemos recomendado utilizar un receptor GPS para obtenerlas, o en su defecto, tomarlas de un mapa Google, afinando la posición lo mejor que se pueda. El caso de las medidas de la distancia de la Luna a las estrellas de referencia es el que contemplamos en este Ejercicio Didáctico.

Antes de desarrollar el tema a que nos hemos comprometido, consideramos necesario advertir al lector que el elevado grado de humedad que reinaba en el lugar elegido por este autor para la observación, superior al 90%, desbarató la medida de la paralaje (la Segunda Actividad), al impedirle retratar a la estrella más débil de las de referencia (la 31 Leonis). Por tanto, lo que le ofrecemos aquí es una simulación de lo que hubiera sido el proceso de medida de las distancias de la Luna a ambas estrellas, de haberse conseguido la fotografía planeada.

La Tabla I muestra las coordenadas del observatorio, la casa del autor en Villaviciosa de Odón (20 Km al SO de Madrid), obtenidos mediante un receptor GPS.

**TABLA I. Datos del observatorio.**

Nombre	Latitud	Longitud	Altitud
Villaviciosa de Odón	40° 21' 36,5" N	03° 54' 37,7" O	634 m

La Tabla II contiene las coordenadas astronómicas de las estrellas de referencia, tomadas del Catálogo Hipparcos, a través del programa Guide versión 6.0.

**TABLA II. Datos de las estrellas de referencia**

Estrella	A. R.	Dec.	Mv
Regulus	10h 08m 22,5s	11° 58' 01,9"	1,36
31 Leonis	10h 07m 54,3s	09° 59' 51,6"	4,39

La foto 1 fue tomada por el autor, entre otras muchas, durante la noche del eclipse, unos minutos antes de la hora propuesta para la medida de la paralaje (01:00:00 T. U.). La estrella 31 Leonis no aparece a pesar de la sobre-exposición que muestra la Luna, probablemente debido a la extinción que produjeron la elevada humedad y el resplandor del Plenilunio.



Esta contrariedad impide incluir esta observación en la lista de trabajos disponibles para la medida de la paralaje lunar, con gran pesar de su autor. Las malas condiciones climáticas son frecuentemente un escollo impredecible y casi siempre inevitable, para los planes mejor preparados de observación astronómica. Solamente la observación con telescopios instalados sobre satélites artificiales están libres de las vicisitudes que presenta la, por otra parte benefactora, atmósfera terrestre. Sin embargo, el tiempo de visibilidad de los objetos que puede estudiar un telescopio orbital está también limitado, aunque por otro tipo de consideraciones.



La foto 2 es una composición de la foto 11 de nuestra Guía para la Observación, que muestra las dos estrellas de referencia, y de una de las fotos de la Luna tomada a la hora convenida durante la fase de la parcialidad del eclipse, en la que solamente se vio la estrella más brillante, Regulus. Ambas fueron tomadas con el telescopio apocromático Megrez, de 6 cm, f/8. La composición se ha realizado manteniendo la distancia de la Luna a Regulus, aunque el verdadero ángulo de posición es desconocido.

Nuestro trabajo con la paralaje se hubiera realizado sobre una foto muy semejante a esta que hemos compuesto, de no haber arruinado la humedad nuestros esfuerzos. Por tanto, la utilizaremos para desarrollar nuestro planteamiento, como si fuera auténtica. El trabajo se puede realizar bien sobre fotografías impresas o bien sobre la pantalla del (de la) PC, si se dispone de algún programa de dibujo que nos permita trazar líneas sobre la foto. Este segundo método es el que recomendamos.

El primer paso consistiría en localizar el centro del disco lunar con una exactitud aceptable. Para conseguir dicha precisión, lo mejor es trazar el cuadrado ex-inscrito, es decir, el que es tangente a la circunferencia lunar en puntos diametralmente opuestos y en cuadratura dos a dos. Esto es lo que mostramos en la foto 3, en la que el cuadrado corta el primer pixel oscuro, siguiente al último pixel grisáceo del disco lunar.

Si trabajamos sobre una copia impresa (deberemos disponer de varias copias, en previsión de los errores que podamos cometer), hemos de trazar los lados paralelos y perpendiculares del cuadrado utilizando escuadra y cartabón.

Sea uno u otro el método que utilicemos, el resultado tiene que ser un cuadrado perfecto, es decir con los cuatro lados iguales y los cuatro ángulos rectos.



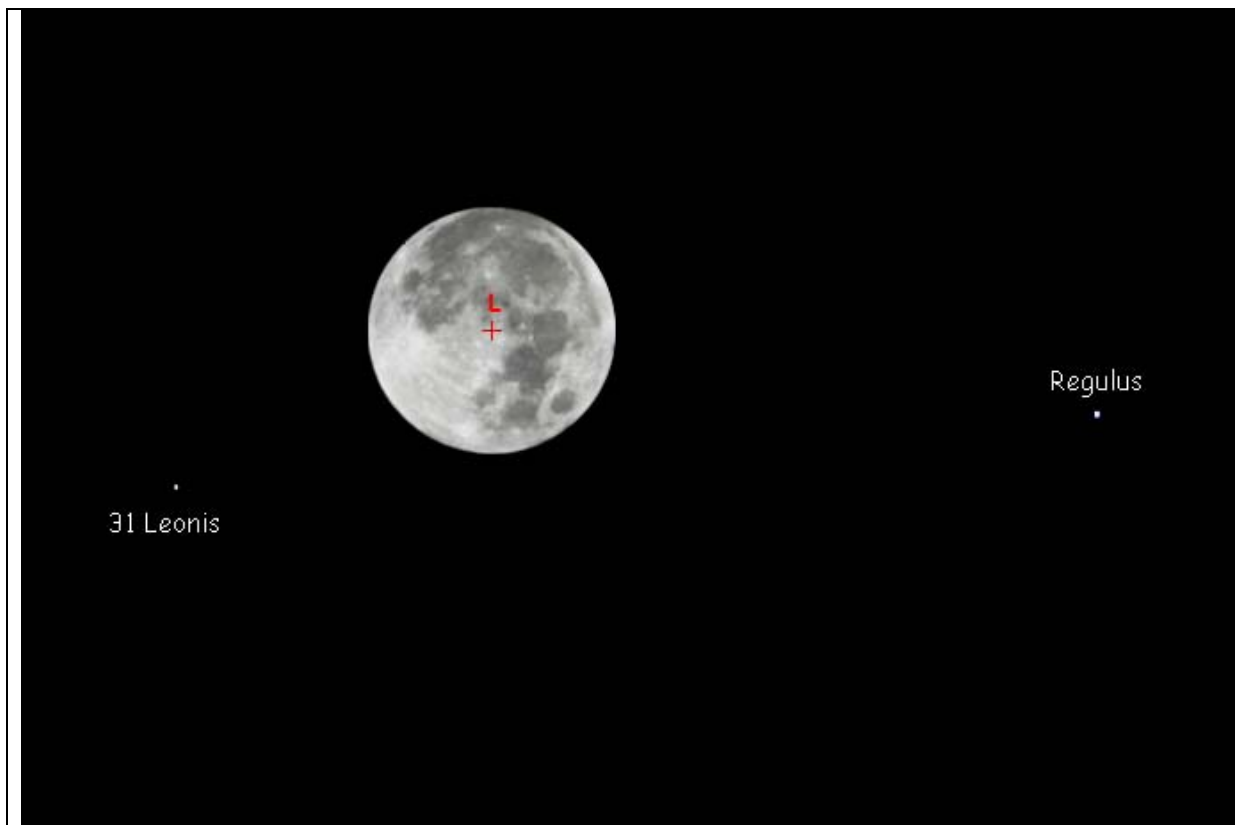
**Foto 3. Trazado del cuadrado ex-inscrito.**

El centro del disco lunar se determina ahora trazando las diagonales del cuadrado, que la geometría nos dice, se cortan en el centro del círculo inscrito, en este caso, el disco lunar. Esto es lo que representamos en la foto 4.



**Foto 4. El centro del disco lunar se halla en el punto de cruce de las diagonales.**





**Foto 5. Eliminadas las líneas auxiliares.**

Seguidamente se pueden borrar las líneas auxiliares, dejando el disco lunar con el centro marcado y las dos estrellas de referencia, como muestra la foto 5. Así queda listo el triángulo esférico cuyos lados menores deseamos conocer en función del lado mayor, cuya longitud es conocida. La foto 6 muestra este triángulo.

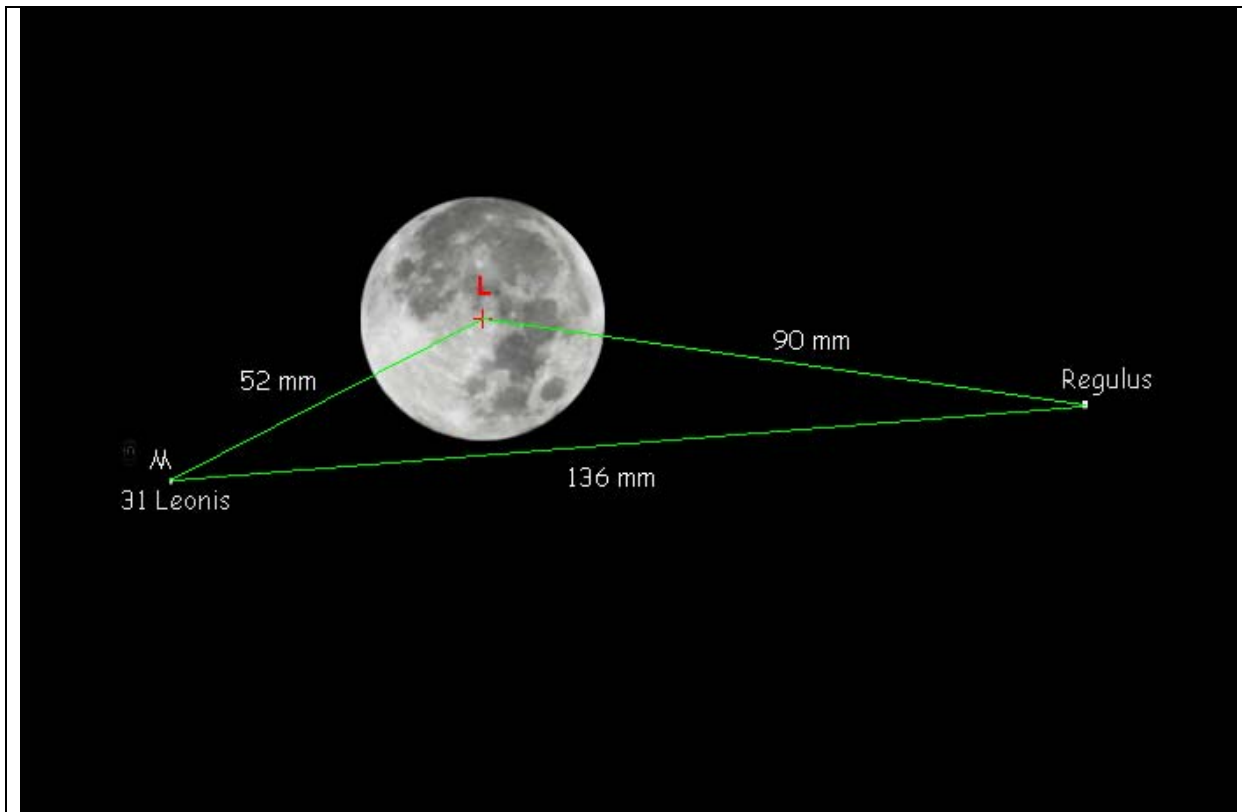
Efectivamente, aunque no hemos hecho hincapié en ello, la distancia angular entre las dos estrellas es fácilmente calculable a partir de sus coordenadas (tabla II) y mediante la fórmula del coseno de la trigonometría esférica. Esta fórmula es la misma que hemos utilizado en la Guía para la Observación del Eclipse a la hora de calcular la distancia de Madrid a Buenos Aires, y ahora la emplearemos sin más que substituir la latitud geográfica de los observatorios por la declinación de las estrellas y la longitud geográfica de aquéllos por la ascensión recta de éstas.

Así, llamando  $\alpha_1$  y  $\delta_1$  a la ascensión recta y a la declinación de Regulus y  $\alpha_2$  y  $\delta_2$  a la ascensión recta y a la declinación de 31 Leonis, la fórmula del coseno establece que el coseno de la distancia angular ( $\lambda$ ) entre ambas estrellas vale:

$$\cos \lambda = \cos (90 - \delta_1) \cos (90 - \delta_2) + \sin (90 - \delta_1) \sin (90 - \delta_2) \cos (\alpha_1 - \alpha_2)$$

Aquí podemos efectuar una simplificación: aprovechando que el coseno de un ángulo es igual al seno de su complementario, substituiremos el coseno de la codeclinación ( $90 - \delta_1$ ) y ( $90 - \delta_2$ ) por el seno de la declinación en ambos casos. Queda entonces:

$$\cos \lambda = \sin \delta_1 \sin \delta_2 + \cos \delta_1 \cos \delta_2 \cos (\alpha_1 - \alpha_2)$$



**Foto 6. Triángulo formado por las dos estrellas de referencia y el centro lunar.**

Si en la fórmula anterior sustituimos las letras por sus valores tomados de la tabla II convertidos al sistema decimal y multiplicando la ascensión recta por 15 para convertir las horas en grados, resulta:

$$\cos \lambda = \sin 11,9672 \sin 9,9977 + \cos 11,9672 \cos 9,9977 \cos ((10,1396 - 10,1318) \times 15)$$

$$\lambda = 1,9729^\circ = 1^\circ 58' 22,5''$$

Este dato nos sirve para establecer el módulo de conversión de milímetros a grados en la foto 6 ( $\lambda/MR$ ), con lo que el cálculo de las distancias del centro del disco lunar a cada una de las estrellas se convierte en una sencilla regla de tres.

Para Regulus:

$$LR = \frac{\lambda}{MR} \quad LR = \frac{1,9729}{136} 90 = 1^\circ 18' 20,2''$$

Y para 31 Leonis:

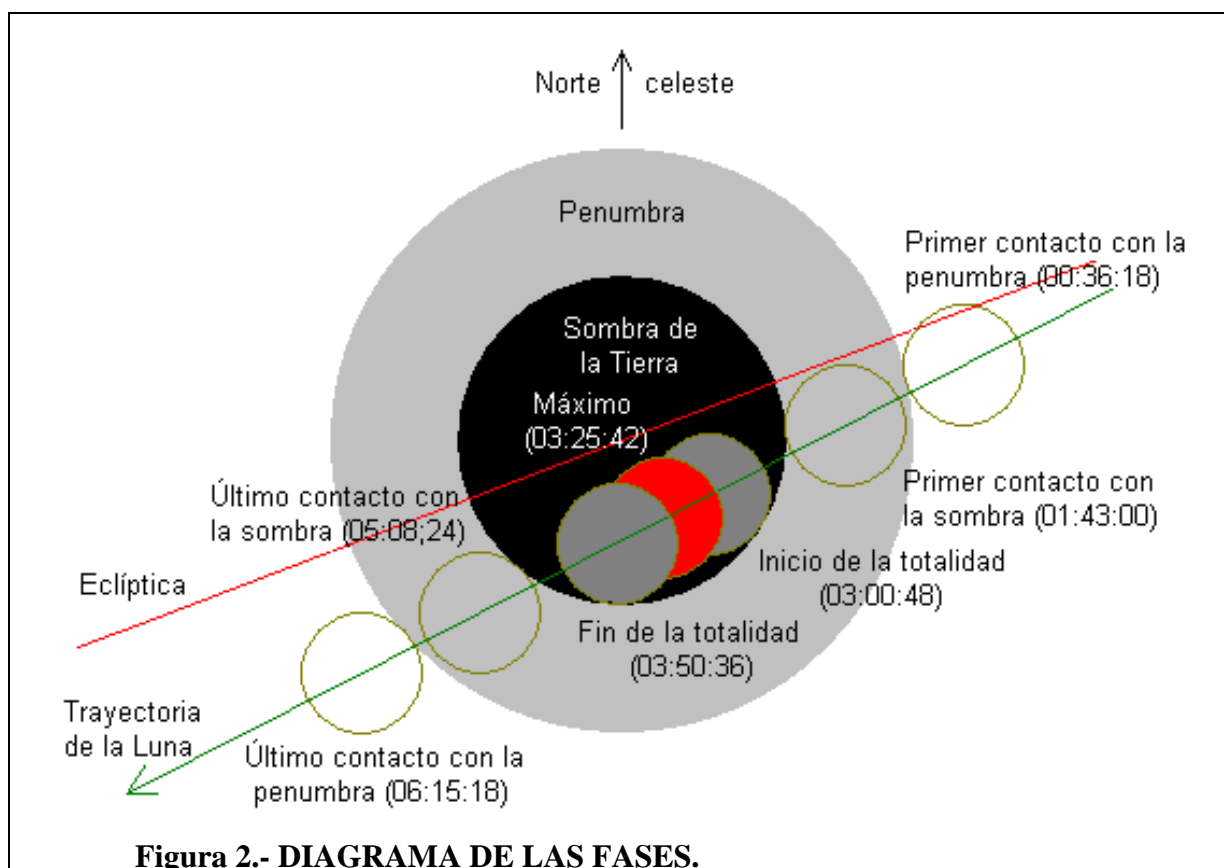
$$ML = \frac{\lambda}{MR} \quad LM = \frac{1,9729}{136} 52 = 0^\circ 45' 15,6''$$

Con lo que ya tendríamos de los datos que requiere el Applet para calcular la distancia Tierra-Luna y la paralaje lunar.

## EJERCICIO DIDÁCTICO 2.

### Fotografía de la sombra de la Tierra.

¿Se puede “ver” la sombra de la Tierra durante un eclipse de Luna? Las fotografías que hayamos tomado durante el eclipse nos pueden servir para producir una composición fotográfica que nos muestre el tamaño de la sombra de la Tierra con exactitud aceptable. La manera de conseguirlo es análoga a la esquematizada en el diagrama de la Figura 2 de la Guía para la Observación, que reproducimos a continuación. Se trata de situar convenientemente tres fotografías de la Luna, una tomada durante la primera parcialidad, otra lo más cerca posible del máximo de la totalidad y otra durante la segunda parcialidad, de manera que nos permitan adivinar el contorno de la sombra terrestre.



Por tanto, debemos contar con las tres fotografías que, en este caso, han sido cedidas amablemente por Adriana Fernández, Alejandro Tombolini, Martín y Maria Mocellini, Julia de Jong y Leonardo Julio, a quienes damos las gracias, toda vez que las fotografías tomadas desde Madrid no nos han permitido captar la tripleta que es necesario utilizar en este ejercicio. Así que utilizaremos las suyas, expuestas en Cielo Sur:

<http://www.cielosur.com/fotos-eclipse-luna-20-21-02-08.php>

En primer lugar es preciso recortar las tres fotos que se tomaron en las tres fases citadas del eclipse y girarlas convenientemente de modo que el eje de rotación de la Luna quede orientado de acuerdo con el esquema que pretendemos dibujar. En nuestro caso, el eje debe quedar horizontal, con el Sur a la izquierda, como se ve en las fotos 1, 2 y 3, cuyo diámetro mide 55 mm. Más adelante veremos el porqué de esta necesidad.



Para seguir adelante necesitamos consultar la información que contiene la Tabla IV de la misma Guía para la Observación. La reproducimos a continuación, resaltando en rojo las filas que contienen los datos del primer y último contactos con la sombra, que son los que buscamos.

**TABLA IV**  
**FASES DEL ECLIPSE**

Hora U	Mag Pe	Mag Um	A Pos	Latitud	Longitud	Distan	R Pen	R Umb	Diá L
00:36:18	0,000	-1,038	101° 54'	11° 12'	07° 06'	1,495	1,235	0,696	0,519
<b>01:43:00</b>	1,039	0,000	<b>093° 06'</b>	10° 54'	23° 18'	<b>0,955</b>	1,235	<b>0,695</b>	<b>0,519</b>
03:00:48	2,039	1,000	055° 48'	10° 36'	42° 06'	0,436	1,234	0,695	0,519
03:25:42	2,146	1,106	026° 36'	10° 30'	48° 12'	0,380	1,234	0,695	0,519
03:50:36	2,040	1,000	357° 30'	10° 24'	54° 12'	0,435	1,234	0,695	0,519
<b>05:08:24</b>	1,040	0,000	<b>320° 12'</b>	10° 06'	73° 00'	<b>0,953</b>	1,233	<b>0,694</b>	<b>0,518</b>
06:15:18	0,000	-1,041	311° 24'	09° 48'	89° 06'	1,492	1,233	0,694	0,518

En primer lugar, fijémonos en las dos últimas columnas de la derecha, que contienen el radio de la sombra terrestre (R Umb) y el diámetro de la Luna (Diá L) en grados, respectivamente. Notemos que ambos datos son constantes a lo largo del eclipse y que solamente disminuyen una milésima en el último contacto con la sombra. Por tanto, los consideraremos constantes:

$$R \text{ Umb} = 0,695^\circ = 0^\circ 41' 42''$$

$$\text{Diá L} = 0,519^\circ = 0^\circ 31' 08,4''$$

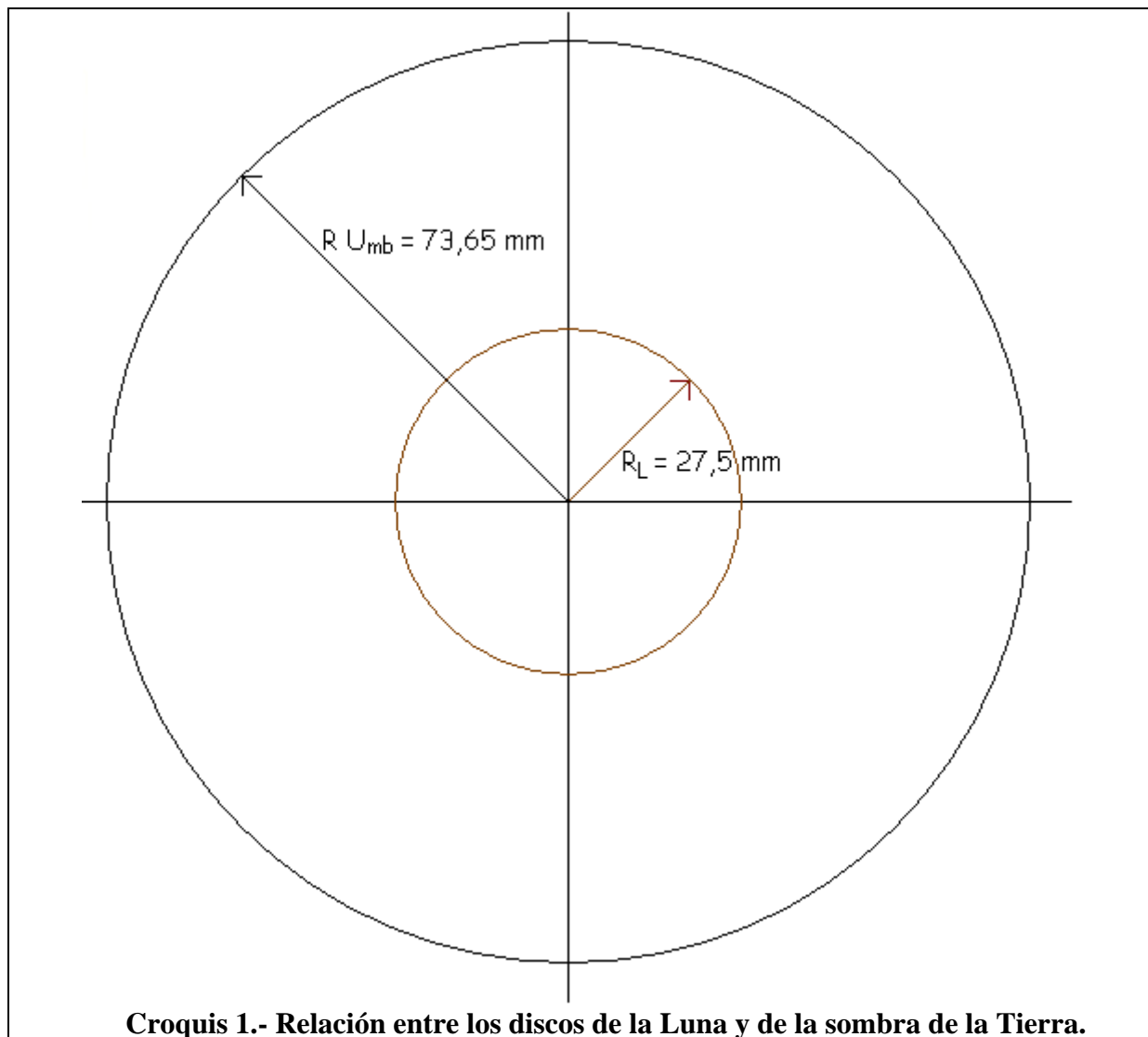
De estos dos datos podemos obtener la relación entre los radios de la sombra terrestre y de la Luna, teniendo en cuenta que Diá L es el diámetro de la Luna. Denominando  $R_L$  al radio de la Luna, resulta:

$$\frac{R \text{ Umb}}{\text{Diá L}/2} = \frac{2 \times R \text{ Umb}}{\text{Diá L}} = \frac{2 \times 0,695}{0,519} = 2,678$$

Por consiguiente, en las fotografías que vamos a utilizar, en las que el disco de la Luna mide 55 mm de diámetro, el radio de la sombra terrestre mide:

$$R \text{ Umb} = 2,678 \times 55 / 2 = 73,65 \text{ mm}$$

Ahora podemos dibujar en una hoja de papel, o pantalla si estamos utilizando un programa de dibujo, ambos círculos, tal como se ve en el croquis 1.

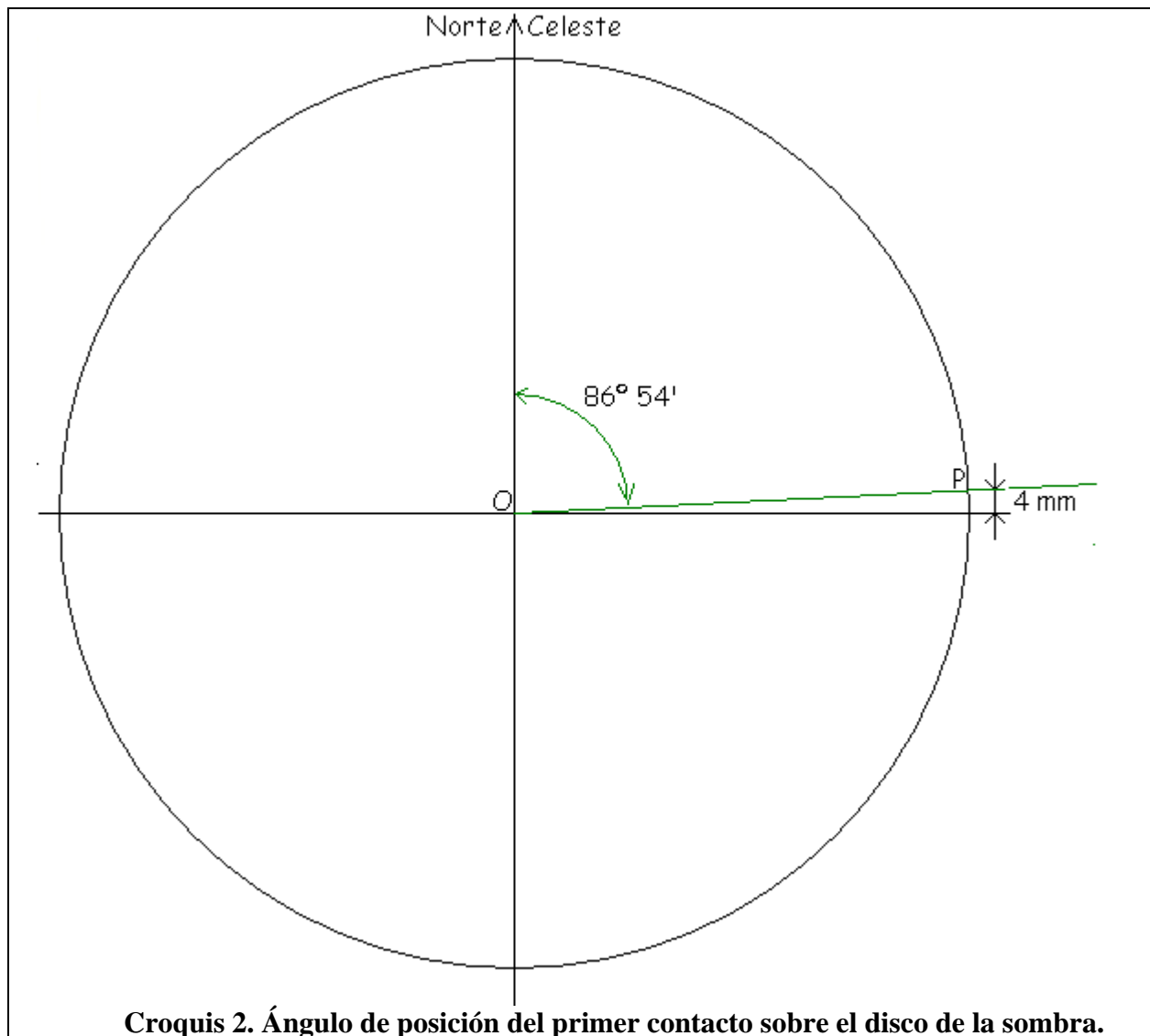


Seguidamente procedemos a representar los ángulos de posición de la Luna sobre el disco de la sombra terrestre. Habida cuenta de que los ángulos que suministra el programa Eclipse Complete y que muestra la Tabla IV, están calculados con referencia al hemisferio Norte, mantendremos esta orientación por el momento, aunque más tarde, al insertar las fotos tomadas desde el hemisferio Sur, habremos de invertir el croquis.

De la segunda fila de dicha tabla obtenemos que el ángulo de posición de la sombra terrestre sobre el disco lunar es  $93^{\circ} 06'$  con respecto al Norte Celeste y en sentido antihorario (la explicación de los datos que contiene la Tabla IV está incluida en la Guía para la Observación). Por tanto, el punto de contacto (o de tangencia) entre ambos discos se encuentra en el tercer cuadrante del disco lunar.

Ahora bien, por la condición de tangencia entre circunferencias podemos traspasar estos datos al disco de la sombra terrestre, sobre el cual el punto de tangencia estará en el cuadrante opuesto (el primero) y formará un ángulo suplementario con la dirección del Norte Celeste, o sea:

$$180 - 93,1^{\circ} = 86,9^{\circ} = 86^{\circ} 54'$$



La manera más fácil de representar el punto P de tangencia sobre el disco de sombra terrestre es recurrir a las funciones trigonométricas, con ayuda de una calculadora. La distancia de este punto P al eje de abscisas vale:

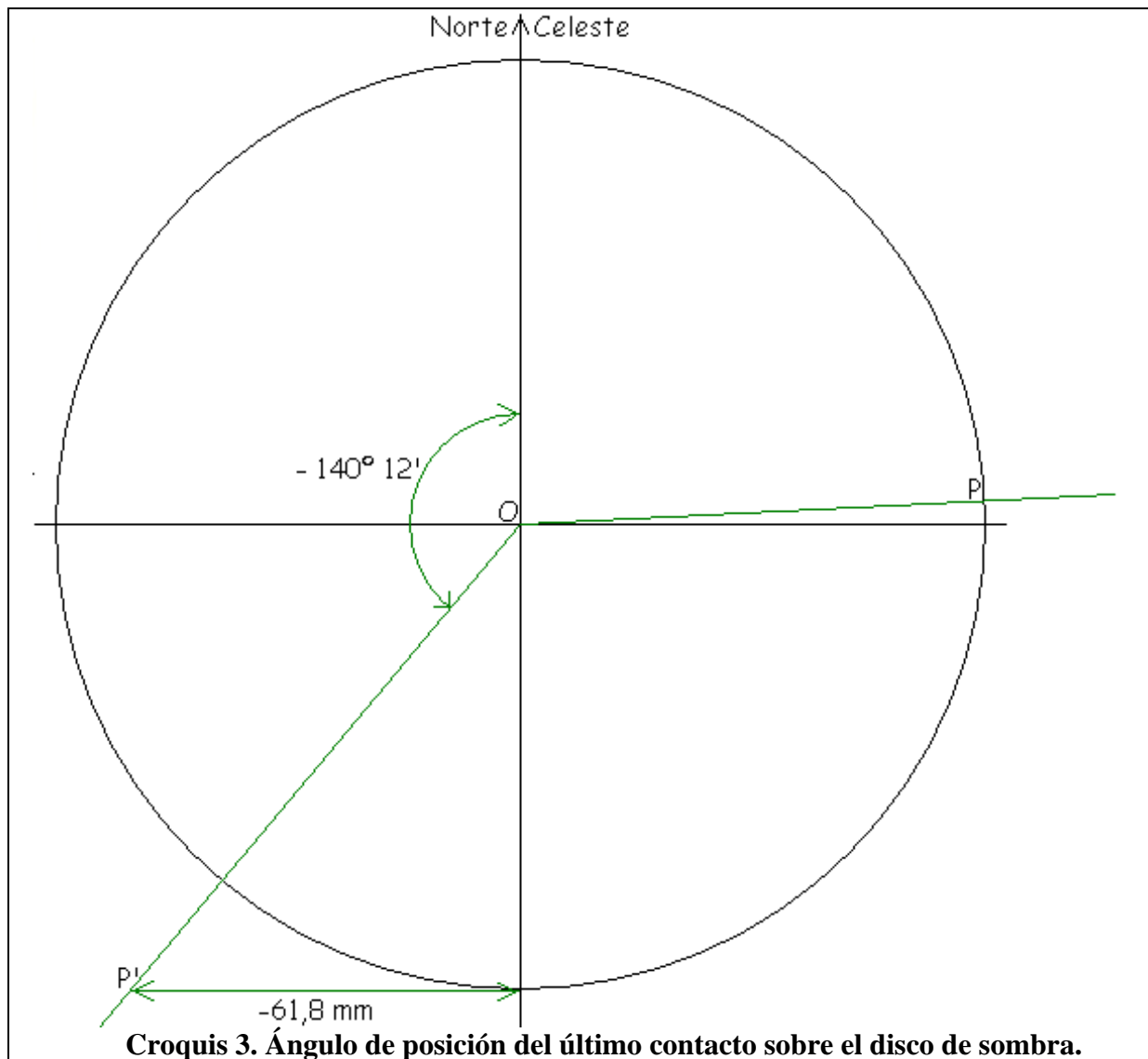
$$R_{\text{Umb}} \times \cos 86,9^\circ = 73,65 \times 0,0054 = 4 \text{ mm}$$

Esto es lo que hemos dibujado en el Croquis 2. A continuación hemos dibujado la recta OP sobre la que tiene que estar situado el centro del disco lunar para que se cumpla la condición de tangencia, preservando el ángulo de posición dado por la Tabla IV.

El siguiente paso consiste en representar sobre el disco de la sombra lunar el punto de tangencia correspondiente al último contacto con la sombra. De la Tabla IV obtenemos que el ángulo de posición sobre el disco lunar vale  $320^\circ 12'$ , en sentido antihorario. O sea, en el primer cuadrante.

Por la misma condición de tangencia entre circunferencias, obtenemos que el ángulo de posición sobre la sombra terrestre queda sobre el tercer cuadrante y vale:

$$180^\circ - 320,2^\circ = 39,8^\circ = -140^\circ 12'$$



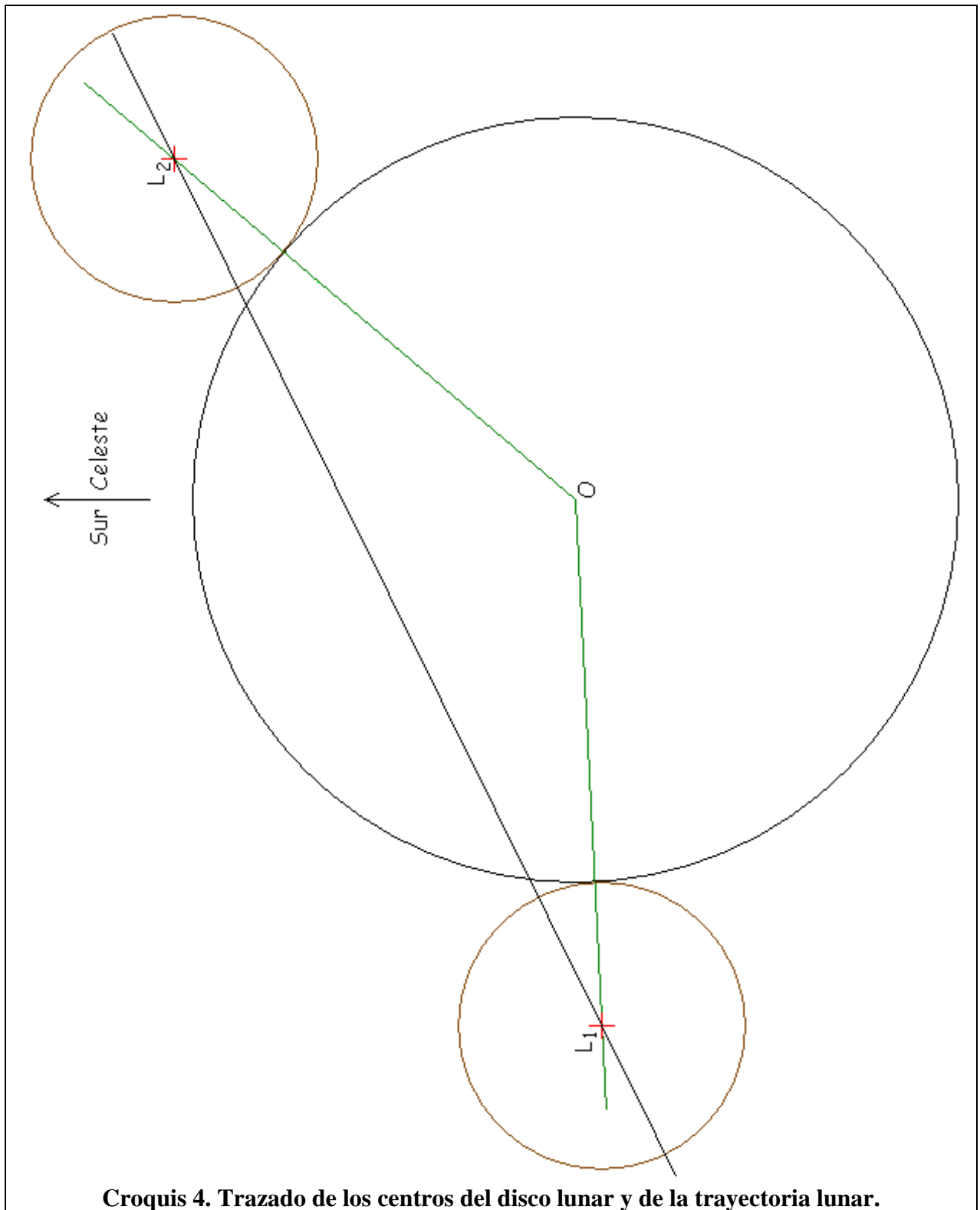
Como en el caso anterior, lo más sencillo es acudir a la trigonometría, para calcular que la distancia del punto P' al eje de ordenadas vale:

$$R_{Umb} \times \tan(-140,2^\circ) = 73,65 \times (-0,7683) = -61,8 \text{ mm}$$

De esta manera, una vez dibujado el punto P', podemos trazar la recta OP', a lo largo de la cual se encuentra el centro de la Luna en el último contacto con la sombra.

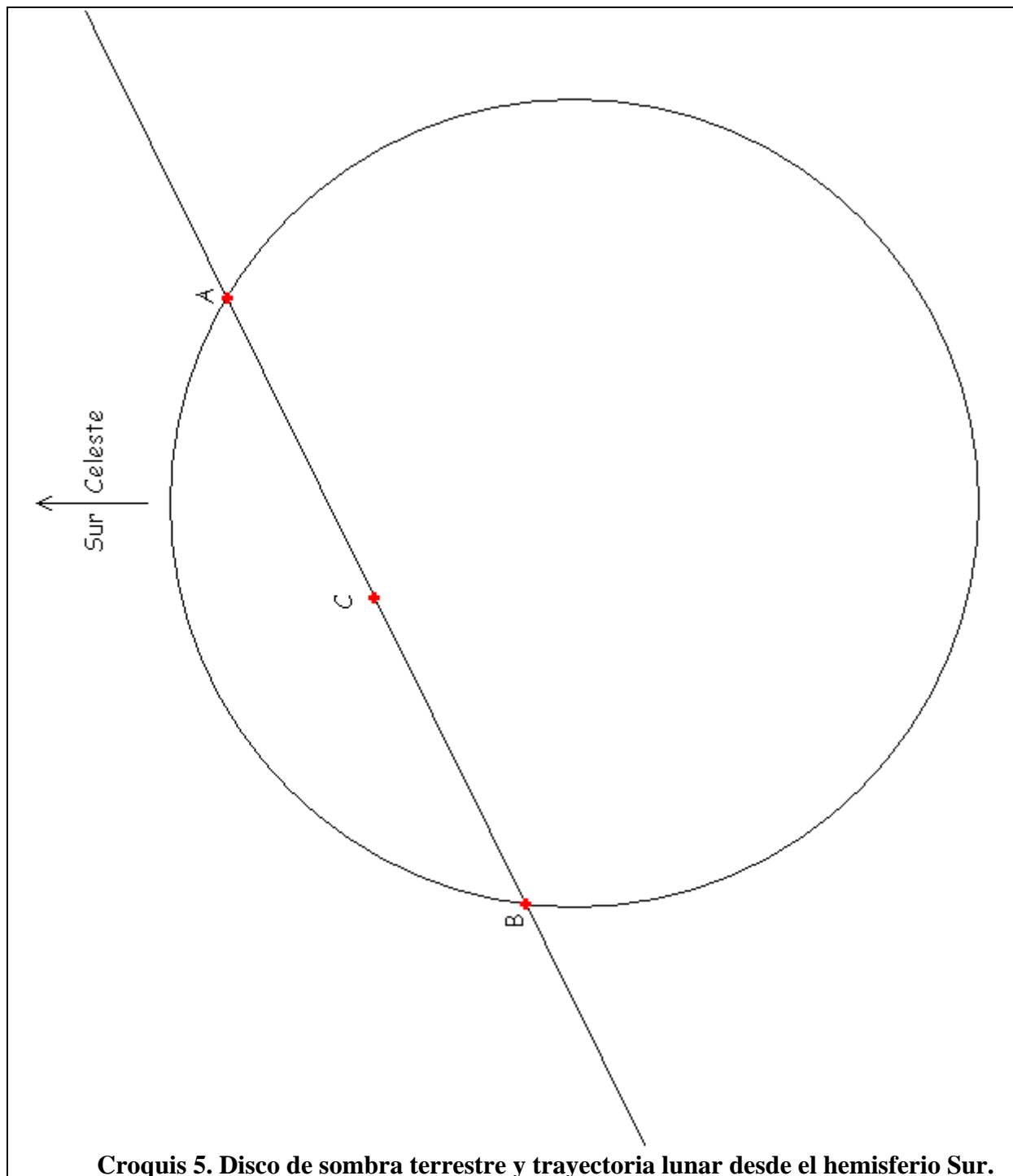
El siguiente paso será situar el disco de la Luna en cada una de las posiciones, del primer contacto y del último contacto con la sombra, sobre las rectas OP y OP'. Como sabemos que el diámetro del disco lunar es de 55 mm, esta operación es muy sencilla, pero hemos de procurar marcar perfectamente los centros L<sub>1</sub> y L<sub>2</sub> del disco lunar en las posiciones de ambos contactos.

A continuación, la trayectoria de la Luna a través del disco de sombra terrestre se obtiene trazando la recta que une los centros L<sub>1</sub> y L<sub>2</sub> del disco lunar en ambos contactos. Esto es lo que hemos hecho en el Croquis 4, cuya orientación hemos tenido que variar para que cupiera el dibujo sin modificar la escala, aprovechando para situar el Sur hacia arriba.



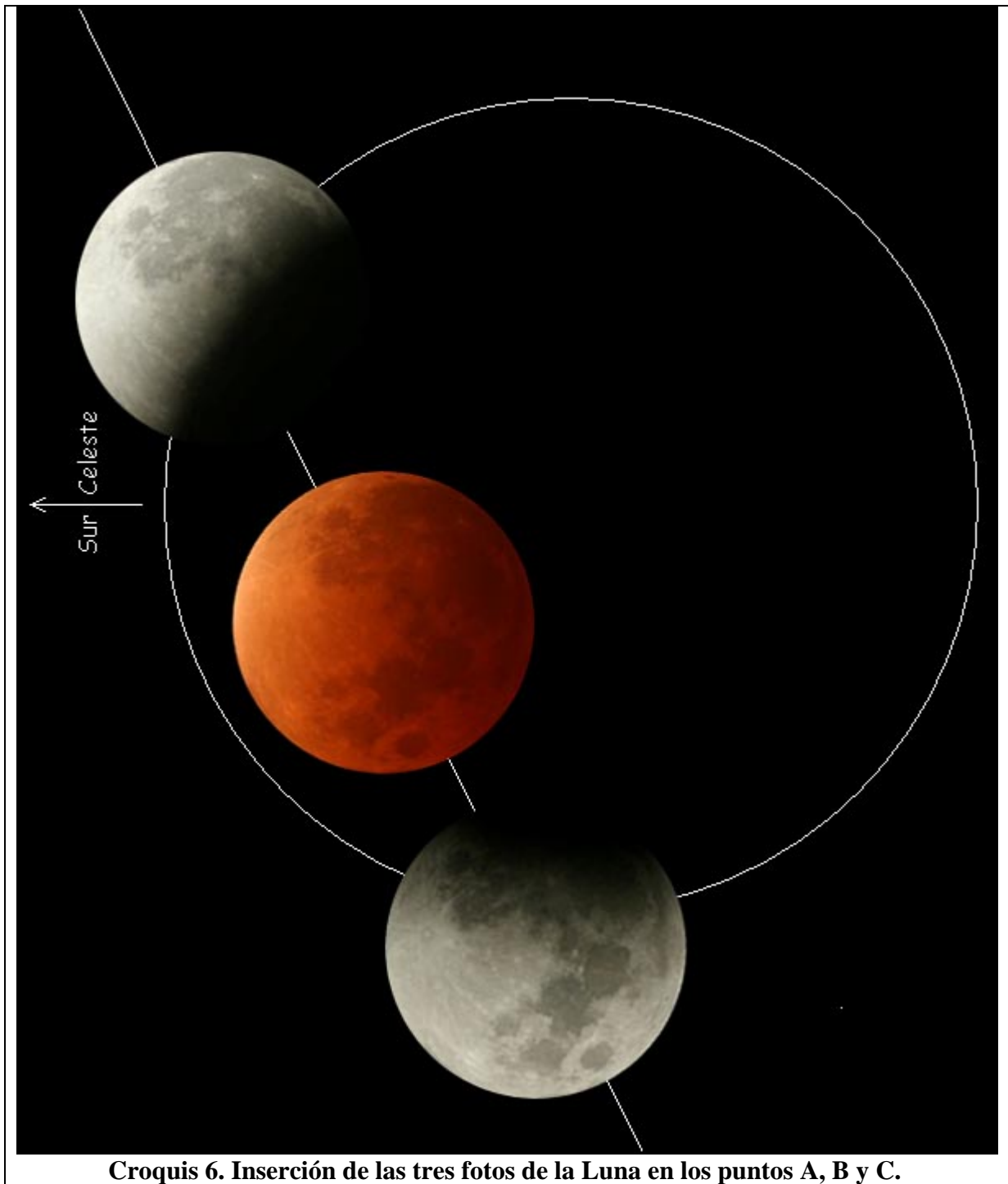
Una vez obtenido el Croquis 4, ya nos sobran los discos lunares y las dos rectas que unen el centro de la sombra (O) con los centros de dichos discos ( $L_1$  y  $L_2$ ). Al eliminar dichas líneas auxiliares recuperamos el disco de la sombra terrestre y la trayectoria de la Luna. Aprovecharemos este dibujo sencillo para marcar el centro (C) de la trayectoria lunar, entre los puntos A y B de corte con el disco, tal como muestra el Croquis 5.





El siguiente paso, que es el penúltimo, consiste en invertir los colores en la pantalla (si hemos realizado el dibujo sobre un papel, deberemos digitalizarlo para llegar al final).

A continuación copiaremos la foto 1 de la Luna, que ya tendremos orientada convenientemente, y la insertaremos sobre el punto A, cuidando de que la sombra proyectada sobre la Luna siga la curvatura del disco de sombra terrestre. Análogamente, copiaremos la foto 2 de la Luna sobre el punto B. Y, finalmente, la foto 3 sobre el punto C. El resultado es el que muestra el Croquis 6.



El retoque final será borrar las líneas auxiliares para producir la “foto” de la sombra terrestre, enmarcada por las fotografías de la Luna. El resultado será el que muestra el Croquis 7. Si hemos realizado la composición con el debido cuidado, se debe satisfacer a todos los parámetros de las filas resaltadas en la Tabla IV.



**Croquis 7. Aspecto de la sombra de la Tierra durante el eclipse.**

En esta “foto” el cerebro humano es el verdadero artífice de que consigamos “ver” la sombra de la Tierra. En efecto, merced a su capacidad de completar las figuras que solamente aparecen esbozadas en la realidad, es posible contemplar la sombra de la Tierra en esta imagen, en la que realmente solamente muestra dos fragmentos.